Задача 18. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\left.\begin{array}{l} 5x+12y-6z=-5 \\ 4x+5y-5z=-8 \\ 3x+5y-2z=-10 \end{array}\right\}$$

Решение:

$$X=\frac{\Delta x}{\Delta} \qquad Y=\frac{\Delta y}{\Delta} \qquad Z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$ Формула Крамера

$$\Delta=\begin{bmatrix} 5 & 12 & -6 \\ 4 & 5 & -5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}=5*\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}-12*\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}+(-6)*\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=$$

$$=5\,(-10-5(-5))-12\,(-8-3\,(-5))-6\,(20-15)=5\ 15-84-30=-39$$

$$\Delta X=\begin{bmatrix} \cancel{-5} & \cancel{12} & \cancel{-6} \\ -8 & 5 & -5 \\ -10 & 5 & -2 \end{bmatrix}=-5*\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}-12*\begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}+(-6)*\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}=$$

$$=-5*(-10-5*(-5))-12*(16-50)-6*(-40+50)=-5\ 15-12(*-34)-6\ 10=-75+408-60=273$$

$$\Delta Y=\begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 4 & -8 & -5 \\ 3 & -10 & -2 \end{pmatrix}=5*\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}-(-5)*\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-6*\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}=$$

$$=5*(16-50)+5*(-8+15)-6*(-40+24)=-170+35+96=-39$$

$$\Delta Z=\begin{bmatrix} 5 & 12 & -5 \\ 4 & 5 & -8 \\ 3 & 5 & -10 \end{bmatrix}=5*\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}-12*\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}+-(-5)*\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=$$

$$=5*(-50+40)-12*(-40+24)-5*(20-15)=-50+192-25=117$$

$$X=\frac{\Delta X}{\Delta}=\frac{273}{-39}=-7 \qquad Y=\frac{\Delta y}{\Delta}\ \frac{-39}{-39}=1 \qquad Z=\frac{\Delta z}{\Delta}\ \frac{-117}{-39}=-3$$

Ответ: (-7; 1; -3)

Задача 19. Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\left.\begin{aligned} 5X + 3Y &= -3 \\ 2X - 4Y &= -22 \end{aligned}\right\}$$

Решение:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad X = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X}{Y} \quad B=\begin{pmatrix} -3 \\ -22 \end{pmatrix} \quad X = A^{-1} B \quad A^{-1} = \frac{1}{D(A)} A^{T} -$$ обратная матрица

$$D(A) = \begin{vmatrix} \overset{\oplus}{5} & \overset{\ominus}{3} \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 5*(-4) - 2*3 = -26 \neq 0$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad a_{11} = (-1^{1+1})*(-4) = -4 \quad a_{12} = (-1^{1+2}) * 3 = -3$$

$$a_{12} = (-1^{1+2}) * 2 = -2 \quad a_{22} = (-1^{2+2}) * 5 = 5$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad A^{*T} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{X}{y} = \frac{1}{-26} * \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -22 \end{pmatrix} = \frac{1}{-26} * \begin{bmatrix} 12 & 66 \\ 6 & -110 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} * \begin{bmatrix} 12 + 66 \\ 6 + (-110) \end{bmatrix} = \frac{1}{26} * \begin{bmatrix} 78 \\ -104 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: X = -3 Y = 4

Задача 20. Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\left.\begin{aligned} 5x + 12y - 6z &= -5 \\ 4x = 5y - 5z &= -8 \\ 3x = 5y - 2z &= -10 \end{aligned}\right\}$$

Решение:

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A X = B \qquad X = A^{-1} * B$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 & -6 \\ 4 & 5 & -5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{matrix} x \\ \overline{y} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$D*(A) = 5*\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} -12*\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +(-6)*\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5*(-10+25)-12*(-8+15)-6*(20-15) =$$

$$=5*(15) -84-30 = -39 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D^*(A)} * A^{*T}$$ обратная матрица

Найдем алгебраические дополнения матрицы

$$a_{11} = (-1)^{2+2+1} \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -10 -5*(-5) = -10 + 25 = 15$$

$$a_{12} = (-1^3) * \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8-3(-5) = -7$$

$$a_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20-15= 5$$

$$a_{21} = (-1)^3 * \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =-(-24+30) = -6$$

$$a_{22} = (-1^4)1 * \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =-10+18 = 8$$

Задача 21. Решить систему уравнений обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x -4y -4z =-1 \\ 4x\ 3y +2z = 4 \\ 5x -2y +3z = -1 \end{cases}$$

Решение:

$$a_{33} = (-1^2) * \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9+16 = 7$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 7 \\ 20 & 29 & -14 \\ -20 & -22 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^{*T} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -2 & 29 & -22 \\ 7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{-35} * \begin{pmatrix} -5 & +20 & -20 \\ -2 & 29 & -22 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-35} * \begin{bmatrix} 5 & +80 & 20 \\ 2 & 116 & 22 \\ -7 & -56 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-35} * \begin{pmatrix} 105 \\ 140 \\ -70 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ответ: X= -3 Y = -4 Z = 2